

Introducción al Álgebra (MA 1101) (13-1)

Control 5 Penta Problema 1

i) \cdot_5 | [0] [1] [2] [3] [4] $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

[0] | [0] [0] [0] [0] [0]

[1] | [0] [1] [2] [3] [4]

[2] | [0] [2] [4] [1] [3]

[3] | [0] [3] [1] [4] [2]

[4] | [0] [4] [3] [2] [1]

(10) →

ii) (\mathbb{Z}_5, \cdot_5) no es grupo, porque en un grupo todo elemento es invertible, y en este caso, [0] no es invertible

iii) La tabla para $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es

| \cdot_5 | [1] | [2] | [3] | [4] |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [2] | [2] | [4] | [1] | [3] |
| [3] | [3] | [1] | [4] | [2] |
| [4] | [4] | [3] | [2] | [1] |

Neutro = [1]

Simétricos $[1]^{-1} = [1]$

$[2]^{-1} = [3]$

$[3]^{-1} = [2]$

$[4]^{-1} = [4]$

(10) →

La tabla es simétrica con respecto a la diagonal, de modo que \cdot_5 es conmutativo en $\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}$ y se sabe que \cdot_5 es asociativo.

(10) → Se concluye que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es grupo Abeliano.

iv) Se trata de un grupo de orden 4, de modo que si tiene subgrupos que no sean los triviales, estos deben ser de orden según el Teorema de Lagrange.

(20) → En efecto, son subgrupos de $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$: $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$, $([1], \cdot_5)$ y $(\{[1], [4]\}, \cdot_5)$ ver Tabla.

Pauta Problema 2

a) $(S, *)$ dado por

| $*$ | e | a | b |
|-----|---|---|---|
| e | e | a | b |
| a | a | e | e |
| b | b | e | a |

Claramente e es neutro en S
pero *

Recordar que si una estructura tiene neutro y su \cdot es asociativo, entonces los inversos, si existen, son únicos.

En este caso, a y b son inversos de a, es decir el inverso de a no es

único, por lo tanto * no es asociativa

ALTERNATIVA: $(a * a) * b = e * b = b \neq a = a * (e * b)$

b) $(A, +, \cdot)$ anillo conmutativo con unidad y $|A|$ finito.

b1) Sea a divisor del cero, $a \neq 0$, hallar $\exists b \in A, b \neq 0$ tal que

0.5 $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b = a \cdot 0$ ($a \cdot 0 = 0$ en el anillo)

Si a fuese invertible $\exists a^{-1} \in A$ y $a^{-1}(ab) = a^{-1}(a \cdot 0) \Rightarrow (a^{-1} \cdot a)b = a^{-1} \cdot 0$
 $\Rightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot 0 \Rightarrow b = 0$ que es una contradicción ($b \neq 0$)

0.5 \Rightarrow Así, a no es invertible

b2) $x \in A - \{0\}$, x no invertible.

i) $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\} \quad x^k \neq 1$. En efecto, si $\exists k \in \mathbb{N} - \{0\}; x^k = 1 \Rightarrow x \cdot x^{k-1} = 1$

10 \Rightarrow y en tal caso x sería invertible, lo que es una contradicción.

ii) $\exists m, n \in \mathbb{N} - \{0\}, m \neq n$ tales que $x^m = x^n$.

Si se supone que no es cierto, entonces el conjunto $\{x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^k / k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ sería un subconjunto infinito de A, que es finito;

10 \Rightarrow que es una contradicción. Así, $\exists m, n \in \mathbb{N} - \{0\}, m \neq n, x^m = x^n$

iii) Según (ii) $\exists m, n \in \mathbb{N} - \{0\}, m \neq n, x^m = x^n$ y $m < n$ (por ejemplo)

10 $\Rightarrow x^m - x^n = 0 \Rightarrow$ Por distributividad $x^m(1 - x^{n-m}) = 0$ de donde

llamando $p = m$ y $q = n - m$ se cumple $\exists p, q \in \mathbb{N} - \{0\}; x^p(1 - x^q) = 0$

10 iv) Según (iii) $\exists p, q \in \mathbb{N} - \{0\}; x^p(1 - x^q) = 0$ pero $1 - x^q \neq 0$ pues $x^q \neq 1$ según (i)
 Así, $x^p = 0 \Rightarrow x \cdot x^{p-1} = 0$ con $x \neq 0$ entonces x es divisor del cero